Ο ΤΡΙΤΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΚΕΠΛΕΡ

Τα τετράγωνα των περιόδων των πλανητών είναι αντιστρόφως ανάλογα προς τους κύβους(τρίτη δύναμη) των μέσων αποστάσεών τους από τον Ήλιο.

Ας υποθέσουμε ότι η Γη (ή άλλος πλανήτης) κινείται γύρω από τον Ήλιο σε ελλειπτική τροχιά μέσης ακτίνας R. Έστω T η περίοδος της περιστροφικής αυτής κινήσεως.
Η περίοδος T είναι λογικό να εξαρτάται από τη δύναμη F που ασκεί ο Ήλιος στη Γη, την μάζα m_p της Γης και την μέση απόσταση (μέση ακτίνα) R της τροχιάς.
Αυτά περιγράφονται από τη σχέση:

$$T = f(F, m_p, R)$$

Αν γράψουμε τη σχέση αυτή έτσι ώστε η αναλογία να εκφραστεί με τη μορφή δυνάμεων στο κάθε μέγεθος, τότε προκύπτει η αναλογία:

$$T \sim F^a \cdot m_p^{\ b} \cdot R^c \qquad (1)$$

όπου: a, b, c παράμετροι οι οποίοι θα υπολογιστούν με τη μέθοδο της «διαστατικής ανάλυσης»[1]

Η περίοδος T μετράται σε δευτερόλεπτα (s^1)[2], η μάζα m_p του πλανήτη (Γη) μετράται σε kg^1, η δύναμη F μετράται σε $kg \cdot m \cdot s^{-2}$, και η μέση απόσταση R σε m^1.
Αν τώρα στη σχέση (1) αντικαταστήσουμε στα μεγέθη τις μονάδες τους (μέθοδος διαστατικής ανάλυσης) παίρνουμε την ισοδύναμη σχέση:

$$s^1 = (kg^1 \cdot m^1 \cdot s^{-2})^a \cdot (kg^1)^b \cdot (m^1)^c$$

και κάνοντας τις πράξεις:

$$s = kg^a \cdot m^a \cdot s^{-2a} \cdot kg^b \cdot m^c$$

και:

$$s = kg^{a+b} m^{a+c} s^{-2a}$$

την τελευταία σχέση, για να διευκολύνουμε τον σχηματισμό συστήματος εξισώσεων, την τροποποιούμε στην ισοδύναμή της:

---

[1] *Η διαστατική ανάλυση είναι μία τεχνική που κάνει χρήση της μελέτης των διαστάσεων για τη λύση προβλημάτων κυρίως μηχανικής. Με τη βοήθεια της διαστατικής ανάλυσης συσχετίζονται μεταξύ τους διαφορετικές φυσικές ποσότητες, ταυτοποιώντας τα θεμελιώδη μεγέθη τους (όπως η μάζα, ο χρόνος, το μήκος) και τις μονάδες μετρήσεως και παρακολουθώντας αυτές τις διαστάσεις στους υπολογισμούς ή τις συγκρίσεις, που εκτελούνται. Η διαστατική ανάλυση εφαρμόζεται ευρέως στις ως τεχνική μετατροπής μονάδων μέτρησης με κανόνες της άλγεβρας. Οποιαδήποτε ισότητα (και ανισότητα) με φυσικό νόημα οφείλει να έχει ίδιες διαστάσεις στο δεξιό και αριστερό μέλος, μια ιδιότητα γνωστή ως **διαστατική ομοιογένεια**. Ο έλεγχος της διαστατικής ομοιογένειας είναι μια κοινή εφαρμογή της διαστατικής ανάλυσης, που εξυπηρετεί στον έλεγχο ορθότητας των παραγόμενων υπολογισμών και εξισώσεων. Επίσης, χρησιμεύει ως οδηγός και περιοριστής των παραγόμενων εξισώσεων, που περιγράφουν ένα φυσικό σύστημα, ελλείψει πιο αυστηρής παραγωγής.*

[2] *Στις μονάδες μετρήσεως θα εμφανίζουμε την μοναδιαία δύναμη για να βοηθηθούμε στον σχηματισμό του συστήματος εξισώσεων με τη βοήθεια του οποίου θα υπολογίσουμε τις παραμέτρους*

$$kg^0 m^0 s^1 = kg^{a+b} m^{a+c} s^{-2a}$$

από την οποία λαμβάνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 0 &= a+b \\ 0 &= a+c \\ 1 &= -2a \end{aligned}$$

με λύση την:

$$\begin{aligned} b &= -a \\ c &= -a \\ a &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (2)$$

Επομένως η (1) με τη βοήθεια της (2) παίρνει τη μορφή:

$$T \sim F^{-1/2} m_p{}^{1/2} R^{1/2}$$

ή αλλιώς:

$$T \sim \sqrt{\frac{m_p.R}{F}}$$

και

$$T^2 \sim \frac{m_p.R}{F} \qquad (3)$$

Γνωρίζουμε όμως από τον Νόμο του Νεύτωνα ότι η δύναμη F δίδεται από τη σχέση:

$$F = G\frac{m_p.M}{R^2} \qquad (4)$$

όπου M η μάζα του Ηλίου και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας εκφρασμένη σε $kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

Η σχέση (3) με τη βοήθεια της (4) γίνεται:

$$T^2 \sim \frac{m_p.R}{G\frac{m_p.M}{R^2}}$$

ή ισοδύναμα:

$$T^2 \sim \frac{R^3}{G.M} \qquad (5)$$

Όμως το γινόμενο $G.M$ είναι σταθερό αφού η μάζα του Ηλίου και η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητος είναι σταθερές.

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$T^2 \sim R^3$$

η σχέση αυτή αποτελεί την μαθηματική έκφραση του 3^{ου} Νόμου του Κέπλερ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για να φθάσουμε στη σχέση (5) και να αποδείξουμε τον 3ο Νόμο του Κέπλερ, θεωρήσαμε δεδομένο τον Νόμο της βαρύτητος του Νεύτωνα, που ο Κέπλερ αγνοούσε αφού ήταν κατά πολύ νεώτερός του, ο σκοπός μας όμως εδώ ήταν να αποδειχθεί με τη μέθοδο της διαστατικής αναλύσεως ο 3ος Νόμος του Κέπλερ και έτσι μας επιτρέπεται ένας τέτοιος αναχρονισμός.

2. Αν για κάποιο λόγο θα θέλαμε να βρούμε με την ίδια μέθοδο (διαστατική ανάλυση) τη σχέση που δίνει τη δύναμη, θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

Είναι λογικό η δύναμη που ασκείται από τον Ήλιο στον πλανήτη να είναι συνάρτηση της μάζας M *του Ηλίου, της μάζας* m_p *του πλανήτη, της παγκόσμιας σταθεράς* G *της βαρύτητας και της αποστάσεως* R *(μέση ακτίνα). Όλα αυτά μπορούμε να τα συμπεριλάβουμε στη σχέση:*

$$F = f(G, M, m_p, R)$$

Αν γράψουμε τη σχέση αυτή έτσι ώστε η αναλογία να εκφραστεί με τη μορφή δυνάμεων στο κάθε μέγεθος, τότε προκύπτει η αναλογία:

$$F \sim G^a \cdot M^b \cdot m_p{}^c \cdot R^d \qquad (α)$$

Αρχικά θα πρέπει, για να ισχύει ο νόμος δράσης-αντίδρασης, να είναι:

$$b = c$$

δηλαδή η τάξη μεγέθους των μαζών Ηλίου και Γης (πλανήτη) να είναι ίδια, αφού επηρεάζουν-καθορίζουν κατά τον ίδιο τρόπο τη δύναμη F*. Επομένως η (α) γίνεται:*

$$F \sim G^a \cdot M^c \cdot m_p{}^c \cdot R^d$$

Αν τώρα κατά τρόπο όμοιο με αυτόν που κάναμε στην σχέση (1), αντικαταστήσουμε στην (α) στα μεγέθη τις μονάδες τους (μέθοδος διαστατικής αναλύσεως) παίρνουμε κατά σειρά την ισοδύναμη σχέση:

$$kg^1 m^1 s^{-2} = (kg^{-1} m^3 s^{-2})^a \cdot (kg^1)^c \cdot (kg^1)^c \cdot (m^1)^d$$

και κάνοντας διαδοχικά τις πράξεις στις σχέσεις:

$$kg^1 m^1 s^{-2} = kg^{-a} \cdot m^{3a} \cdot s^{-2a} \cdot kg^c \cdot kg^c \cdot m^d$$

και

$$kg^1 m^1 s^{-2} = kg^{-a+2c} \cdot m^{3a+d} \cdot s^{-2a}$$

από την οποία λαμβάνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 1 &= -a + 2c \\ 1 &= 3a + d \\ -2 &= -2a \end{aligned}$$

με λύση την:

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ d &= -2 \\ a &= 1 \end{aligned} \qquad (\beta)$$

Επομένως η (α) με τη βοήθεια της (β) παίρνει τη μορφή:

$$F \sim G^1 \cdot M^1 \cdot m_p^{\ 1} \cdot R^{-2}$$

ή αλλιώς:

$$F = G\frac{m_p . M}{R^2}$$

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης