

ΓΚΑΟΥΣΙΑΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

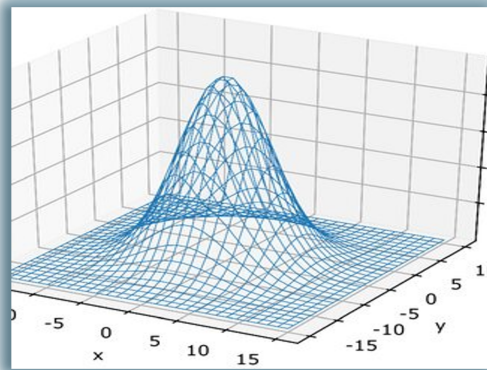
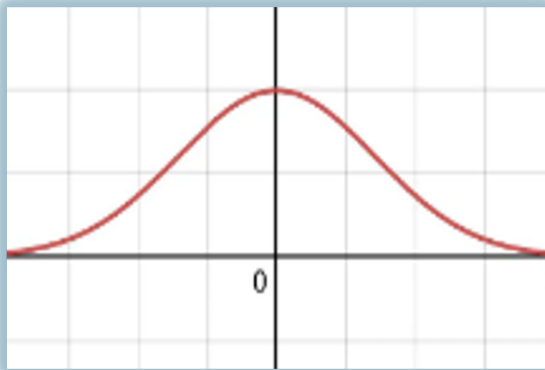
Το Γκαουσιανό Ολοκλήρωμα (*Gaussian Integral*) είναι ένα σπουδαίο ολοκλήρωμα με πολλές εφαρμογές στην Φυσική και ιδιαίτερος στην Κβαντομηχανική για την επίλυση της εξίσωσης *Schrödinger*.

Πρόκειται για το ολοκλήρωμα της γνωστής συνάρτησης *Gauss*, της οποίας ο τύπος δίδεται από τη σχέση:

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad (1)$$

και της οποίας η απλούστερη αντιπρόσωπος είναι η $f(x) = e^{-x^2}$ και προκύπτει για την τιμή του a : $a = 1$.

Η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης φαίνεται στην εικόνα 1 και αυτή του αντιστοίχου ολοκληρώματος στην εικόνα 2.



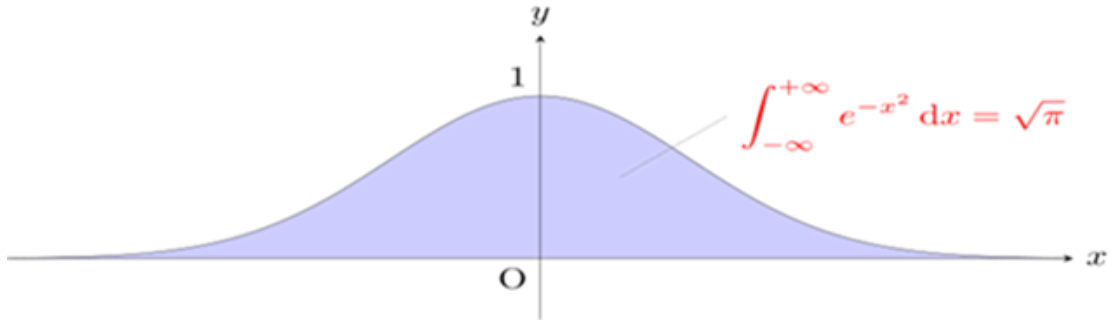
Εικόνα 1: (Αριστερά) Η γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησεως. (Δεξιά) Η διδιάστατη γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησεως (με δύο μεταβλητές x, y), όπως δίδεται στο *WolfgangAlpha*.

Δυστυχώς δεν υφίσταται κάποιος στοιχειώδης τρόπος για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα και για να το πετύχουμε καταφεύγουμε σε τεχνάσματα. Για τον υπολογισμό του προτείνουμε τις δύο παρακάτω μεθόδους:

Α' Μέθοδος

Η φιλοσοφία της μεθόδου αυτής είναι η εξής: εφόσον δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κατά μήκος της πραγματικής ευθείας (άξονας x), δοκιμάζουμε να το κάνουμε στο επίπεδο (x, y) , υψώνοντας εις το τετράγωνο το ζητούμενο ολοκλήρωμα. Στο δεύτερο από τα δύο όμοια ολοκληρώματα που πολλαπλασιάζονται για

να προκύψει το «τετράγωνο», αλλάζουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσεως (από x σε y), χωρίς να προκαλέσουμε βλάβη της γενικότητας, και στη συνέχεια κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων από καρτεσιανές σε πολικές.



Εικόνα 2: Η γραφική παράσταση του Γκαουσιανού Ολοκληρώματος περιλαμβάνει την γαλάζια σκιασμένη επιφάνεια, η οποία δεσμεύεται από την γκαουσιανή καμπύλη και τον οριζόντιο άξονα x' .

Έστω ότι είναι

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad (2)$$

το ολοκλήρωμα *Gauss*, το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε (για ευκολία υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της απλούστερης αντιπροσώπου της συναρτήσεως *Gauss*, κατόπιν θα προχωρήσουμε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος της σχέσεως (1).

Το τετράγωνο αυτού του ολοκληρώματος γράφεται:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)$$

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα αλλάζουμε την μεταβλητή¹ από x σε y και ισοδύναμα είναι:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Στη συνέχεια κάνουμε αλλαγή συντεταγμένων από καρτεσιανές σε πολικές, σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$x = r \cos \theta \quad (3)$$

$$y = r \sin \theta \quad (4)$$

έτσι ώστε να ισχύει:

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \quad (5)$$

¹ Η μεταβλητή x είναι «ψευδομεταβλητή» και η μεταβολή της δεν προκαλεί βλάβη της γενικότητας.

και γι' αυτή την αλλαγή είναι:

$$dxdy = r dr d\theta \quad (6)$$

με τις πολικές συντεταγμένες να βρίσκονται εντός των διαστημάτων:

$$r \in (0, +\infty) \text{ και } \theta \in (0, 2\pi) \quad (7)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η σχέση (6) προκύπτει ως άμεση συνέπεια της σχέσεως του γινομένου των διαφορικών σε μία αλλαγή συντεταγμένων, όπως παρακάτω:

$$dxdy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \cdot dr d\theta$$

όπου $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$ είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα 2×2 .

Για τον υπολογισμό της Ιακωβιανής ορίζουσας υπολογίζουμε αρχικά τα μερικά διαφορικά ∂x και ∂y με τη βοήθεια των σχέσεων (3) και (4) ως παρακάτω:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} = -r \sin \theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

κατόπιν αντικαθιστούμε τις ποσότητες αυτές στην ορίζουσα και παίρνουμε:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta - (-r \sin^2 \theta) = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

και επειδή $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ θα είναι:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

από όπου τελικά παίρνουμε:

$$dxdy = r \cdot dr d\theta$$

Κατά συνέπεια το τετράγωνο του ολοκληρώματός μας θα είναι:

$$I^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint e^{-r^2} r dr d\theta$$

όπου τα όρια ολοκληρώσεως του δευτέρου ολοκληρώματος, προκύπτουν από τα διαστήματα των σχέσεων (7) και το τετράγωνο του ολοκληρώματος παίρνει τη μορφή:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \quad (8)$$

- Το ολοκλήρωμα ως προς θ είναι βασικό ολοκλήρωμα και υπολογίζεται:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \theta|_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi \quad (9)$$

- Το ολοκλήρωμα ως προς r υπολογίζεται με την μέθοδο της αντικαταστάσεως:

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \frac{1}{2} dr^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr^2 \quad (10)$$

Για τις ανάγκες της μεθόδου της αντικαταστάσεως θέτω $u = r^2$ και το ολοκλήρωμα (10) γίνεται ισοδύναμα:

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr^2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} d(-u) \quad (11)$$

και επειδή το αόριστο ολοκλήρωμα $\int e^{-u} d(-u)$ ισούται με:

$$\int e^{-u} d(-u) = e^{-u}$$

η σχέση (11) δίνει αποτέλεσμα:

$$-\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-u} d(-u) = -\frac{1}{2} e^{-u}|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2} (e^{-\infty} - e^0) = -\frac{1}{2} (0 - 1) = \frac{1}{2}$$

Έτσι το ορισμένο ολοκλήρωμα των (10) και (11) έχει τιμή:

$$\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \quad (12)$$

Συνεπώς το τετράγωνο του ζητούμενου ολοκληρώματος, λόγω των σχέσεων (8),(9) και (10) θα είναι:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

και τελικά το ζητούμενο γκαουσιανό ολοκλήρωμα είναι:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (13)$$

Όπως είπαμε η λύση αυτή μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση του ολοκληρώματος:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

Στην περίπτωση αυτή δουλεύουμε με την αντικατάσταση $v = \sqrt{a}x$, οπότε είναι: $ax^2 = v^2$ και $x = \frac{v}{\sqrt{a}}$ και το ολοκλήρωμα J παίρνει τη μορφή:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} d\left(\frac{v}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv$$

και λόγω της σχέσεως (13) τελικά παίρνουμε:

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (14)$$

Β' Μέθοδος

Στη μέθοδο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε την Ειδική Συνάρτηση Γάμμα (Gamma Function), για την οποία πληροφορίες δίδονται στο τέλος σε ειδικό παράρτημα.

Θα υπολογίσουμε ξανά το ολοκλήρωμα

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

Θα ξεκινήσουμε με την παραδοχή ότι η γκαουσιανή συνάρτηση $f(x) = e^{-ax^2}$ είναι μία «άρτια»² συνάρτηση επομένως για το ορισμένο ολοκλήρωμά της θα ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$$

Επομένως, έπειτα από αυτή την παραδοχή, αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $G = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$, οπότε θα είναι:

$$J = 2G \quad (1)$$

²Αυτό εύκολα αποδεικνύεται, αφού είναι $f(-x) = e^{-a(-x)^2} = e^{-ax^2} = f(x)$

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $G(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$, και ας παραγωγίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό ως προς a , από την παραγωγήιση θα πάρουμε:

$$\frac{dG(a)}{da} = \frac{d(\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx)}{da} = \int_0^{+\infty} \left[\frac{d(e^{-ax^2})}{da} \right] dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \left[\frac{d(-ax^2)}{da} \right] dx$$

και μετά την παραγωγήιση της αγκύλης μέσα στο ολοκλήρωμα, ισοδύναμα:

$$\frac{dG(a)}{da} = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} [-x^2] dx = - \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x^2 dx \quad (2)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$ax^2 = t$$

$$\text{και θα είναι } x^2 = \frac{t}{a} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a}}$$

και επίσης

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a}})}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{d(t^{1/2})}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot t^{1/2-1} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{t}} dt$$

Με αυτό το μετασχηματισμό η σχέση (2) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dG(a)}{da} = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{t}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{t}} dt = - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{t}{\sqrt{t}} dt$$

και τελικά:

$$\frac{dG(a)}{da} = - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{1}{2}} dt \quad (3)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσεως (3) είναι η Συνάρτηση Γάμμα

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{z-1} dt \quad (4)$$

για $z = \frac{3}{2}$. [Εκτενέστερα για τη συνάρτηση Γάμμα βλέπε στο Παράρτημα Α.]

Πράγματι αν $z = \frac{3}{2}$ τότε από την σχέση (4) έχουμε:

$$\Gamma(\frac{3}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{3}{2}-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot t^{\frac{1}{2}} dt \quad (5)$$

Έτσι η σχέση (3) λόγω της (5) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dG(a)}{da} = - \frac{1}{2a\sqrt{a}} \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) \quad (6)$$

-Μια από τις ιδιότητες³ της Συναρτήσεως Γάμμα είναι η παρακάτω:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (7)$$

οπότε εφαρμόζοντας την αυτή την ιδιότητα για $z = \frac{1}{2}$ παίρνουμε:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

και

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (8)$$

-Επίσης μία ακόμη ιδιότητα της συναρτήσεως Γάμμα αναφέρεται στη σχέση:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (9)$$

εφαρμόζοντάς τη για $z = \frac{1}{2}$ παίρνουμε διαδοχικά:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$$

και τελικά

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (10)$$

Λόγω των σχέσεων (8) και (10) η σχέση (6) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{dG(a)}{da} = -\frac{1}{2a\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (11)$$

Γράφουμε την σχέση (11) σε μια πιο βολική μορφή:

$$dG(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot a^{-\frac{3}{2}} \cdot da \quad (12)$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την αόριστη ολοκλήρωση και στα δύο μέλη της (12) παίρνουμε διαδοχικά:

$$\int dG(a) = \int -\frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-\frac{3}{2}} da$$

³Για τον ορισμό, ιδιότητες και αποδείξεις, δες στο Παράρτημα Α.

$$\int dG(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \int a^{-\frac{3}{2}} da$$

$$G(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c$$

(όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσεως) και μετά τις πράξεις:

$$G(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c$$

και

$$G(a) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} + c, \quad (13)$$

η σταθερά ολοκλήρωσεως αποδεικνύεται, σε μια διαδικασία, η οποία αναλύεται στο Παράρτημα Β, ότι είναι:

$$c = 0.$$

Έτσι καταλήγουμε ότι είναι:

$$G(a) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}$$

και τελικά:

$$J(a) = 2G(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

δηλαδή στο ίδιο αποτέλεσμα με την Μέθοδο Α [σχέση (14)].

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης
Θεσσαλονίκη, 29 Ιουν 2024

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

(Συνάρτηση Γ [Gamma Function])

Η Συνάρτηση Γάμμα είναι μία από τις απλούστερες και σημαντικότερες «Ειδικές Συναρτήσεις»⁴ και η γνώση των ιδιοτήτων της είναι συχνά προαπαιτούμενο για την μελέτη πολλών άλλων ειδικών συναρτήσεων.

Η θεωρία για τη συνάρτηση Γάμμα αναπτύχθηκε στην προσπάθεια της γενίκευσης του παραγοντικού φυσικών αριθμών, δηλαδή στην προσπάθεια να βρεθεί μια έκφραση που να επεκτείνει το $n!$ σε οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό. Έτσι αποδείχθηκε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt, \quad n \in \mathbb{N}$$

ισούται με $n!$, δηλαδή

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

Η συνάρτηση Γάμμα εισήχθη από τον Σουηδό Μαθηματικό Leonard Euler (1703-1783)⁵ και ο ορισμός του επεκτάθηκε και στους μιγαδικούς αριθμούς ώστε τελικά να πάρει τη σημερινή του μορφή, όπως παρακάτω:

Ορισμός: Η συνάρτηση γάμμα (ή απλώς συνάρτηση $\Gamma(z)$) είναι η συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους μιγαδικούς αριθμούς με θετικό πραγματικό μέρος,

$$H(0) = z : z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0$$

και τύπο:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

η οποία συγκρίνει για κάθε μιγαδικό αριθμό με θετικό πραγματικό μέρος.

Ιδιότητες

$$(\alpha) \quad \Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C} \text{ με } \operatorname{Re}(z) > 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον ορισμό και για $z = z + 1$ παίρνουμε:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt$$

⁴Ειδικές Συναρτήσεις είναι ιδιαίτερες συναρτήσεις που εμφανίζονται σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών των Μαθηματικών της Φυσικής και της Χημείας, όπως στη Αριθμητική Ανάλυση, Θεωρία Πιθανοτήτων, Υπολογιστική Άλγεβρα, Θεωρία Συνεχών Κλασμάτων, Κβαντομηχανική, Θεωρία Ηλεκτρομαγνητισμού, Διάδοση μή Γραμμικών Κυμάτων, Θεωρία Διαθλάσεως, Θεωρητική Χημεία και άλλων. Οι περισσότερο γνωστές Ειδικές Συναρτήσεις είναι: η Συνάρτηση Βήτα και Γάμμα, οι Κυλινδρικές Συναρτήσεις, τα Ορθογώνια Πολυώνυμα, η Υπεργεωμετρική Συνάρτηση, το Ολοκλήρωμα Πιθανότητας, η Συνάρτηση Σφάλματος και άλλες.

⁵Ο συμβολισμός $\Gamma(z)$ οφείλεται στον Legendre το έτος 1803

Το ολοκλήρωμα αυτό θα το υπολογίσουμε με τη μέθοδο ολοκληρώσεως κατά παράγοντες, υπολογίζοντας πρώτα το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή για δύο συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ είναι:

$$\int f(t)g'(t)dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt$$

θέτοντας τώρα $f(t) = e^{-t}$ και $g(t) = t^z$ θα είναι:

$$\int e^{-t}(t^z)'dt = e^{-t}t^z - \int (e^{-t})'t^z dt$$

ισοδύναμα:

$$\int e^{-t} \cdot z t^{z-1} dt = e^{-t}t^z - \int -e^{-t}t^z dt$$

βγάζοντας τη σταθερά z εκτός του πρώτου ολοκληρώματος και απλοποιώντας τα πρόσημα στο δεύτερο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$z \int e^{-t}t^{z-1} dt = e^{-t}t^z + \int e^{-t}t^z dt$$

λύνοντας ως προς το ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους, το οποίο είναι και το ζητούμενο, παίρνουμε:

$$\int e^{-t}t^z dt = e^{-t}t^z + z \int e^{-t}t^z dt \quad (A)$$

Για το ορισμένο ολοκλήρωμα ισχύει:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-t}t^z dt \quad (B)$$

Και παίρνοντας όρια στην σχέση (A) έχουμε:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-t}t^z dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} [e^{-t}t^z + z \int_0^a e^{-t}t^z dt]$$

και

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-t}t^z dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} [e^{-t}t^z] + z \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-t}t^z dt \quad (\Gamma)$$

Τέλος λόγω της σχέσεως (B), [η οποία ισχύει για όλα τα ολοκληρώματα με άνω όρισμα το $+\infty$], και επειδή $\lim_{a \rightarrow +\infty} [e^{-t}t^z] = [e^{-t}t^z]_{t=0}^a = 0$ η σχέση (Γ) γίνεται:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt = 0 + z \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt$$

που λόγω του ορισμού της Συναρτήσεως Γάμμα τελικά παίρνει τη μορφή:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$$

(β) $\Gamma(1) = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από τον ορισμό είναι:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt$$

όμως επειδή γνωρίζουμε ότι:⁶

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

τελικά θα είναι:

$$\Gamma(1) = 1$$

(γ) $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πράγματι εφαρμόζοντας την ιδιότητα (α) για $z = 1$ παίρνουμε:

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1) = \Gamma(1) = 1$$

(δ) Αν $z = n \in N$ τότε $\Gamma(n+1) = n!$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $z = n \in N$ τότε ο ορισμός της Συναρτήσεως Γάμμα μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση της συναρτήσεως «Παραγοντικό Φυσικών Αριθμών» σε οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z με $Re z > 0$.

Πράγματι αν για $z = n \in N$ εφαρμόσουμε διαδοχικά την ιδιότητα (α) παίρνουμε:

$$\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot \underbrace{[(n-1)\Gamma(n-1)]}_{\Gamma(n)} = n(n-1) \cdot \underbrace{[(n-2)\Gamma(n-2)]}_{\Gamma(n-1)} =$$

⁶Πράγματι είναι:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a e^{-t} dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_{t=0}^a \stackrel{a \rightarrow +\infty}{=} -e^{-a} - (-e^{-0}) \stackrel{a \rightarrow +\infty}{=} 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned}
&= n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \dots = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = \\
&\stackrel{\Gamma(1)=1}{=} n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot 1 = \\
&= n!
\end{aligned}$$

$$(\epsilon) \quad \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ένας εναλλακτικός ορισμός της συναρτήσεως γάμμα, που οφείλεται κι αυτός στον *Euler* και ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό $z \neq 0$, είναι ο παρακάτω:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}} \quad (A)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (α): $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$ και εφαρμόζοντάς την για $z = -z$ παίρνουμε:

$$\Gamma(-z+1) = -z \cdot \Gamma(-z)$$

και ισοδύναμα:

$$\Gamma(1-z) = -z \cdot \Gamma(-z) \quad (B)$$

Εφαρμόζουμε τον ορισμό (A) για $z = -z$ και παίρνουμε ισοδύναμα:

$$\Gamma(-z) = \frac{1}{-z} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{-z}}{1 + \frac{-z}{n}}$$

πολλαπλασιάζουμε με $(-z)$ [για να συνθέσουμε το δεξιό μέρος της (B)] και παίρνουμε:

$$(-z) \cdot \Gamma(-z) = (-z) \cdot \frac{1}{-z} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{-z}}{1 - \frac{z}{n}}$$

και ισοδύναμα:

$$-z \cdot \Gamma(-z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{-z}}{1 - \frac{z}{n}} \quad (\Gamma)$$

Το δεξιό μέρος της (B) και το αριστερό της (Γ) είναι ίσα, άρα:

$$\Gamma(1-z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{-z}}{1 - \frac{z}{n}} \quad (\Delta)$$

Πολλαπλασιάζουμε τώρα κατά μέλη τις (Α) και (Δ) και παίρνουμε τη σχέση:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{-z}}{1 - \frac{z}{n}}$$

η οποία μετά τις απλοποιήσεις⁷ γίνεται:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \quad (E)$$

Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι ισχύει:

$$\sin z = z \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

και εφαρμόζοντας την τελευταία αυτή σχέση για $z = \pi z$ παίρνουμε:

$$\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{n^2 \pi^2}\right)$$

και απαλείφοντας το π^2 , ισοδύναμα:

$$\sin \pi z = \pi z \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

τέλος διαιρώντας αριστερό και δεξιό μέρος με τον όρο πz θα είναι:

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

και τελικά αντιστρέφοντας:

$$\frac{\pi z}{\sin \pi z} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{z^2}{n^2}}\right) \quad (\Sigma T)$$

Στην σχέση (E) αντικαθιστούμε το πολλαπλάσιο με το ίσο του από την (ΣΤ):

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{\pi z}{\sin \pi z}$$

και μετά την απλοποίηση του z παίρνουμε την αποδεικτέα:

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

⁷Στον παρονομαστή χρησιμοποιήσαμε την γνωστή ταυτότητα της διαφοράς τετραγώνων $(1+x) \cdot (1-x) = 1-x^2$ ώστε: $(1+\frac{z}{n}) \cdot (1-\frac{z}{n}) = 1-\frac{z^2}{n^2}$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

(Υπολογισμός της Σταθεράς Ολοκληρώσεως)

Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός της σταθεράς ολοκληρώσεως c του ολοκληρώματος της σχέσεως (11):

$$\int dG(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \int \frac{da}{2a\sqrt{a}} + c \quad (A)$$

δηλαδή τη σταθερά c της σχέσεως (13) $G(a) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} + c$.

Παρατηρούμε ότι δεν είναι δυνατόν να ανακτήσουμε άμεσα, με ορισμένη ολοκλήρωση, την σταθερά ολοκληρώσεως c , διότι το δεξιό ολοκλήρωμα της (A) αποκλίνει στο κάτω όρισμα $a = 0$.

Σ' αυτές τις περιπτώσεις απροσδιοριστίας δουλεύουμε με τα όρια...

Αν πάρουμε λοιπόν το όριο της σχέσεως (A) με $a \rightarrow +\infty$ έχουμε:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dG(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^{+\infty} \frac{da}{2a\sqrt{a}} \right] + \lim_{a \rightarrow +\infty} c$$

και ισοδύναμα:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dG(a) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{da}{2a\sqrt{a}} + \lim_{a \rightarrow +\infty} c \quad (B)$$

-Για το αριστερό μέρος της (B) έχουμε:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dG(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} G(a)$$

και επειδή είναι:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} G(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} e^{-ax^2} = 0$$

τελικά το αριστερό μέρος της (B) μηδενίζεται:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} dG(a) = 0 \quad (\Gamma)$$

-Για το δεξιό μέρος της (B) επειδή είναι:⁸

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{da}{2a\sqrt{a}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} -\frac{2}{\sqrt{a}} = 0$$

⁸Πράγματι είναι $\int \frac{da}{2a\sqrt{a}} = \int a^{-\frac{3}{2}} da = \frac{a^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = \frac{a^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{a}}$

έχουμε:

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{4} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{da}{2a\sqrt{a}} + \lim_{a \rightarrow +\infty} c = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot 0 + \lim_{a \rightarrow +\infty} c = 0 + \lim_{a \rightarrow +\infty} c \quad (\Delta)$$

Τελικά η σχέση (B) λόγω των (Γ) και (Δ) γίνεται:

$$0 = 0 + \lim_{a \rightarrow +\infty} c$$

δηλαδή:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} c = 0$$

η οποία μπορεί να ισχύει μόνον αν η σταθερά ολοκληρώσεως είναι ίση με μηδέν:

$$c = 0.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Lebedev N.N. (1972) «Special functions and their Applications» Dover Publications, Inc. N.Y.

[2] Μασσαλάς Χ. (2010) «Ειδικές Συναρτήσεις», Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα

[3] Σιαφαρίκας Π. (2009) «Ειδικές Συναρτήσεις», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών

[4] Hochstadt H.(1986) «The function of Mathematical Physics», Dover Publications, Inc. N.Y..

[5] Luke Y. L. (1969) «The special functions and their Approximations» Volume I, Academic Press