Η ΕΞΙΣΩΣΗ FRIEDMANN

Οι εξισώσεις Friedmann είναι ένα σύνολο εξισώσεων στη φυσική κοσμολογία που διέπουν την διαστολή του χώρου σε ομογενή και ισοτροπικά μοντέλα του Σύμπαντος στο πλαίσιο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΣΘ). Διατυπώθηκαν για πρώτη φορά από τον Alexander Friedmann (στα 1922) και προήλθαν από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein, για τον μετρικό τανυστή Friedmann – Lemaître – Robertson – Walker ενός τέλειου ρευστού με δεδομένη πυκνότητα μάζας ρ και πίεση p. Η γενική εξίσωση είχε τη μορφή:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (\alpha)$$

όπου G είναι η Παγκόσμια Σταθερά της Βαρύτητας, *k* είναι η παράμετρος καμπυλότητος, R είναι η βαθμωτή καμπυλότητα του χώρου[1] και *Λ* είναι η κοσμολογική σταθερά του Einstein.

Στην περίπτωση που *k=0=Λ* , δηλαδή στην περίπτωση ενός Σύμπαντος επιπέδου και χωρίς την ανάγκη της κοσμολογικής σταθεράς, η εξίσωση Friedmann απλοποιείται στη μορφή:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho \qquad (\beta)$$

Παρακάτω δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει η εξίσωση Friedmann από τις εξισώσεις πεδίου.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Η απλούστερη μορφή των εξισώσεων πεδίου (δηλ. *k=0=Λ*) είναι[2]:

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \mathrm{T}_{\mu\nu} \qquad (\gamma)$$

Αν το αριστερό μέλος της (γ) αντικατασταθεί από τον τανυστή Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

τότε οι εξισώσεις πεδίου παίρνουν τη μορφή[3]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa \mathrm{T}_{\mu\nu} \qquad (\delta)$$

όπου: $R_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\cdot\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\cdot\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta}$ είναι ο τανυστής Ricci (βλ. [7] σελ. 50 σχ. (1.6.7)), $g_{\mu\nu}$: ο μετρικός τανυστής, R: είναι ο συντελεστής κλίμακος και $\mathrm{T}_{\mu\nu}$: ο τανυστής ενέργειας ορμής.

---

[1] *Η βαθμωτή καμπυλότητα του χώρου, και προκύπτει από την συστολή του τανυστή Ricci* $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ *(βλ. [7] σελ. 50, σχ. (1.6.7))*

[2] *Βλέπε [7] σελ. 92 σχ. (4.1.4))*

[3] *Επισημαίνεται ότι η σταθερά κ της οποίας η τιμή υπολογίζεται* $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ *(βλ. [7] σελ. 94, σχ. (4.1.15)) δεν πρέπει να συγχέεται με την παράμετρο καμπυλότητος k της σχέσεως (α).*

Για $\mu=\nu=0$ η σχέση (δ) γράφεται:

$$R_{00}-\frac{1}{2}g_{00}R=-\kappa T_{00} \qquad (\delta')$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τους όρους της εξισώσεως (δ΄).

Α. Υπολογίζουμε πρώτα τη συνιστώσα χρόνος-χρόνος (00) του τανυστή Ricci, αυτή γράφεται:

$$R_{00}=\Gamma^{\alpha}_{00,\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,\nu}+\Gamma^{\alpha}_{00}\cdot\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta}_{0\alpha}\cdot\Gamma^{\alpha}_{0\beta} \qquad (\varepsilon)$$

όμως τα σύμβολα Christoffel[4] στο επίπεδο Friedmann-Robertson-Walker (FRW) Σύμπαν είναι[5]:

$$\Gamma^{0}_{00}=0,\quad \Gamma^{0}_{0\alpha}=\Gamma^{0}_{\alpha 0}=0,\quad \Gamma^{0}_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}\dot{\alpha}\alpha,\quad \Gamma^{\alpha}_{0\beta}=\Gamma^{\alpha}_{\beta 0}=\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta},\quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}=0,\quad \Gamma^{\alpha}_{00}=0 \quad (\sigma\tau)$$

οπότε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (στ) υπολογίζουμε τα σύμβολα Christoffel της (ε) όπως παρακάτω:

- $\Gamma^{\alpha}_{00,\alpha}=\dfrac{\partial\Gamma^{\alpha}_{00}}{\partial x^{\alpha}}=\dfrac{\partial 0}{\partial x^{\alpha}}=0$ (παραγωγήσαμε το $\Gamma^{\alpha}_{00}=0$ ως προς x^{α})
- $\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,\nu}=\dfrac{\partial\Gamma^{\alpha}_{0\alpha}}{\partial x^{\nu}}$ όμως επειδή από την τρίτη σχέση της (στ) για α=β είναι

  $\Gamma^{\alpha}_{0\alpha}=\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^{\alpha}_{\alpha}$ θα έχουμε:

$$\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,\nu}=\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{0\alpha}}{\partial x^{\nu}}=\frac{\partial(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^{\alpha}_{\alpha})}{\partial x^{\nu}}=\delta^{\alpha}_{\alpha}\cdot\frac{\partial(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})}{\partial x^{\nu}}+\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\cdot\frac{\partial(\delta^{\alpha}_{\alpha})}{\partial x^{\nu}}$$

  επειδή είναι: $\delta^{\alpha}_{\alpha}=\delta^{1}_{1}+\delta^{2}_{2}+\delta^{3}_{3}=1+1+1=3$ (το α παίρνει τιμές $\alpha=1,2,3$)

  και επειδή $\dfrac{\partial\delta^{\alpha}_{\alpha}}{\partial x^{\nu}}=0$

  τελικά είναι: $\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,\nu}=\delta^{\alpha}_{\alpha}\cdot\dfrac{\partial(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})}{\partial x^{\nu}}+\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}\cdot\dfrac{\partial(\delta^{\alpha}_{\alpha})}{\partial x^{\nu}}=3\dfrac{\ddot{\alpha}}{\alpha}+\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}\cdot 0$ δηλαδή: $\Gamma^{\alpha}_{0\alpha,\nu}=3\dfrac{\ddot{\alpha}}{\alpha}$
- $\Gamma^{\alpha}_{00}\cdot\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}=0$ (διότι από την έκτη σχέση της (στ) είναι: $\Gamma^{\alpha}_{00}=0$)
- $\Gamma^{\beta}_{0\alpha}\cdot\Gamma^{\alpha}_{0\beta}=(\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^{\beta}_{\alpha})\cdot(\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta})=(\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2(\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta})=(\dfrac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2\cdot 0=0$

  (λόγω της τέταρτης σχέσης της (στ) και επειδή είναι $\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta}=0$)

Έτσι αν συνοψίσουμε όλα αυτά τα αποτελέσματα και τα αντικαταστήσουμε στην (ε) θα πάρουμε:

---

[4] *Στα μαθηματικά και τη φυσική, τα σύμβολα Christoffel είναι ορισμένες συναρτήσεις των συντεταγμένων και η μορφή τους εξαρτάται από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων. Είναι μια σειρά αριθμών που περιγράφουν μια μετρική σύνδεση δηλαδή μια εξειδίκευση της συγγενούς σύνδεσης σε επιφάνειες ή άλλες πολλαπλότητες εφοδιασμένες με μια μετρική, που επιτρέπει τη μέτρηση των αποστάσεων σε αυτήν την επιφάνεια ή την πολλαπλότητα. Περισσότερα βλέπε στα [7] (σελ.24) και [12] της βιβλιογραφίας.*

[5] *Βλέπε [4] σελ. 14, σχέση (1.3.13)*

$$R_{00} = \Gamma^{\alpha}_{00,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{0\alpha,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{00} \cdot \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{0\alpha} \cdot \Gamma^{\alpha}_{0\beta} = 0 - 3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + 0 - 0$$

δηλαδή:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} \qquad (\zeta)$$

Β. Υπολογίζουμε τώρα τα g_{00} και R.

- Στο επίπεδο FRW Σύμπαν ο μετρικός τανυστής έχει συνιστώσα[6]: $g_{00} = 1$. (η)
- Για την βαθμωτή καμπυλότητα του χώρου R είναι[7]:

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_{00} - \frac{1}{\alpha^2}\delta^{ij} R_{ij} \qquad (\theta)$$

και επειδή είναι[8]:

$$R_{ij} = \delta_{ij}[2\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}\alpha]$$

η (θ) γίνεται:

$$R = R_{00} - \frac{1}{\alpha^2}\delta^{ij} \cdot \delta_{ij}[2\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}\alpha]$$

και η οποία λόγω του ότι $\delta^{ij}\delta_{ij} = 3$ αλλά και της (ζ) και τελικά παίρνει τη μορφή:

$$R = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}3[2\dot{\alpha}^2 + \ddot{\alpha}\alpha] = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - 6\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} - 3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}$$

και τελικά:

$$R = -6\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - 6(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2 \qquad (\iota)$$

Είμαστε έτοιμοι λοιπόν τώρα, μετά τους υπολογισμούς που κάναμε στα **Α.** και **Β.**, να αντικαταστήσουμε στη σχέση (δ΄) τα υπολογισθέντα από τις (ζ) , (η) και (ι) στοιχεία, οπότε παίρνουμε:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = -3\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot [-6\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - 6(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2] = -\kappa \mathrm{T}_{00}$$

και κάνοντας τις απαλοιφές ισοδύναμα:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2 = -\kappa \mathrm{T}_{00} \qquad (\iota\alpha)$$

Λαμβάνοντας υπ’ όψιν (υποσημείωση 3) ότι είναι $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ αλλά και ότι η συνιστώσα χρόνος-χρόνος του τανυστή ενέργειας ορμής είναι[9]: $\mathrm{T}_{00} = \rho c^2 = \varepsilon$, η σχέση (ια) γράφεται ισοδύναμα[10]:

$$3(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2 = -\frac{8\pi G}{c^4}\rho c^2 \Leftrightarrow (\frac{\dot{\alpha}}{\alpha})^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho$$

---

[6] *Βλέπε [7] σελ. 20, σχέση (1.1.21)*

[7] *Βλέπε [7] σελ. 50, σχέση (1.6.8) και [4] σελ. 16, σχέση (1.4.5)*

[8] *Βλέπε [4] σελ. 16, σχέση (1.4.4)*

[9] *Βλέπε [7] σελ. 72,73, σχέσεις (3.1.13) και (3.1.14γ)*

[10] *Το μείον (-) μπροστά από τη σταθερά κ στις ισοδύναμες σχέσεις (γ), (δ), (δ΄), και (ια), προκύπτει από μαθηματική επεξεργασία και μπορεί να μην ληφθεί υπ’ όψιν.*

Τέλος επειδή η παράμετρος Hubble, ως συνάρτηση του συντελεστή κλίμακος *α(t)* είναι: $H = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$ καταλήγουμε στην εξίσωση Friedmann, δηλαδή στην (β)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho .$$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Ο *Einstein* στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητος συνέδεσε τους δύο τανυστές: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ (τανυστής Einstein) και $T_{\mu\nu} = (\varepsilon + p) u^{\mu} u^{\nu} - p g^{\mu\nu}$ (τανυστής ενέργειας - ορμής), οι οποίοι εκφράζουν την γεωμετρία (καμπυλότητα) και την φυσική (ενέργεια – ορμή) του χωροχρόνου αντίστοιχα. Οι δύο τανυστές θεωρήθηκαν ανάλογοι και απλώς παρεμβάλλεται ανάμεσά τους η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας.

Συνέδεσε λοιπόν ο *Einstein* την γεωμετρία και τη φυσική του χωροχρόνου με τις περίφημες *«Εξισώσεις Πεδίου»*: $G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}$. Όπου $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ είναι μία σταθερά, η οποία προκύπτει από την κανονικοποίηση των μονάδων και δίδεται από τον λόγο της παγκόσμιας σταθεράς της βαρύτητας G, προς την τέταρτη δύναμη της ταχύτητας του φωτός (c^4), αφού πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα *8π*. Είναι δε ίση με $\kappa = 2 \cdot 10^{-45} N^{-1}$ και διαστατικά εκφράζει «αντίστροφη δύναμη».

ΠΡΟΣΟΧΗ το μείον προκύπτει από την μαθηματική επεξεργασία και μπορεί να μην ληφθεί υπ' όψιν έπειτα από κατάλληλες πράξεις.

Μέσα από τη σχέση αυτή, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}$, είναι δυνατόν να υπολογιστεί ο μετρικός τανυστής $g_{\mu\nu}$, που παίζει έναν ρόλο δυναμικού του βαρυτικού πεδίου, και στη συνέχεια, μέσω αυτού, να υπολογιστεί η κίνηση ενός σωματιδίου το οποίο βρίσκεται εντός του βαρυτικού πεδίου.

Οι *Εξισώσεις Πεδίου*, αν και περιγράφονται από μόνο μία *«Τανυστική»* εξίσωση, εν τούτοις αναλύονται σε 10 πολύπλοκες εξισώσεις που συνδέουν τον μετρικό τανυστή με την ύλη και την ενέργεια των πηγών του βαρυτικού πεδίου.

Οι εξισώσεις είναι 10 και όχι 16 όπως θα περίμενε κανείς (τα μ και ν παίρνουν τιμές 0,1,2,3, οπότε οι δυνατοί συνδυασμοί -άρα και οι εξισώσεις- θα έπρεπε να ήταν $n = 4^2 = 16$) επειδή τόσο ο τανυστής $G_{\mu\nu}$ όσο και ο $T_{\mu\nu}$ είναι συμμετρικοί και επομένως μόνο 10 από τα 16 στοιχεία τους είναι ανεξάρτητα.

Τα 16 στοιχεία δίδονται σε ειδικό πίνακα 4x4 και συμβολίζουν τις συνιστώσες των 16 συντεταγμένων του χωροχρόνου.

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bertotti, B. , Felice, F. and Pascolini, A. (1984) «*General Relativity and Gravitation (Fundamental Theories of Physics)*» Springer

[2] Einstein, A. (1915) «*Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie*». Annalen der Physik vol.354, is.7, pp 769-822. και

«*Η Θεμελίωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας*». (ανατύπωση για το ΒΗΜΑ: Εκδόσεις Τροχαλία 2003)

[3] Eisenhart, E Pf. (1949) «*Riemannian Geometry*». Princeton University Press, Princeton New York.

[4] Hiranya P. V. (2011) «*Cosmology Part I: The Homogeneous Universe*». Department of Physics and Astronomy, University College London, London.

[5] Ηλιοπούλου Ε. Α., Ταμία – Δημοπούλου Π. (1989) «*Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες*» Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

[6] Μπαντές Γιώργος «*Τανυστικός Λογισμός, Παγκόσμια Γλώσσα*», Σέρρες

[7] Σπύρου Ν. Κ. (1989) «*Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας*» Εκδόσεις Γαρταγάνης, Θεσσαλονίκη.

[8] Σταματάκης Στ. (2008) «*Εισαγωγή στην Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία*» Εκδόσεις Αϊβάζη, Θεσσαλονίκη.

[9] Στεφανίδης, Ν Κ. (1995) «*Διαφορική Γεωμετρία*», Θεσσαλονίκη.

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[10] https://el.wikipedia.org/wiki/Δέλτα_του_Κρόνεκερ

[11] https://physics4u.gr/blog/2020/01/29/η-εξίσωση-του-alexander-friedmann/

[12] https://en.wikipedia.org/wiki/Christoffel_symbols