Ο ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ - ΟΡΜΗΣ

Στο πλαίσιο της Νευτώνειας θεωρίας της βαρύτητας, η συνάρτηση Lagrange για την κίνηση ενός σωματιδίου (βλ. εξ. (2.3.1), σελ. 65 του [6]) είναι:

$$L = \mu c^2 - \frac{1}{2}\mu\upsilon^2 - \mu U$$

όπου μ και υ είναι η μάζα και η τριδιάστατη ταχύτητα του σωματιδίου, κινούμενου μέσα στο πεδίο βαρύτητος δυναμικού U.

Οι εξισώσεις κινήσεως του σωματιδίου (βλ. εξ. (2.3.2), σελ. 65 του [6]) είναι:

$$\dot{\upsilon}^{\alpha} = U_{,\alpha}$$

και το βαρυτικό δυναμικό ικανοποιεί την εξ. Poisson (εξ. (2.3.3), σελ. 65 του [6]):

$$\nabla^2 U = -4\pi G\rho$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα ύλης της βαρυτικής πηγής και G η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητος.

Όμως στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητος δεν μπορούμε να αναφερόμαστε μόνο στην πυκνότητα της ύλης, διότι σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας μάζας - ενέργειας

$$\Delta E = mc^2$$

της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητος, η ύλη και η ενέργεια δεν μπορούν να διακριθούν μεταξύ τους ως προς τις αδρανειακές τους ιδιότητες. Άρα στην περιγραφή του μη κενού χώρου, δηλαδή του πεδίου βαρύτητος μέσα σε μία φυσική πηγή, θα πρέπει να ληφθούν, πέρα από την πυκνότητα της ύλης ρ της πηγής, όλες οι άλλες δυνατές μορφές ενέργειάς της, όπως π.χ. η ακτινοβόλος ενέργεια, η ελαστική ενέργεια κ.λ.π. Οι τελευταίες συνιστούν το ενεργειακό περιεχόμενο του χωροχρόνου, στο οποίο δεν συμπεριλαμβάνεται η βαρυτική ενέργεια.

Οι πληροφορίες για τη μάζα – ενέργεια μιας βαρυτικής πηγής (στο πλαίσιο της ΓΘΣ) συμπεριλαμβάνονται στον *τανυστή ενέργειας – ορμής* (energy – momentum tensor) ο οποίος γενικά είναι ένας συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως και συμβολίζεται ως T^{ik}

Για να περιγράψουμε το φυσικό περιεχόμενο του τανυστή ενέργειας – ορμής είναι απαραίτητη η έννοια του τοπικού συστήματος ηρεμίας η οποία δίδεται στον παρακάτω ορισμό (βλέπε κεφ. 3, σελ. 69 του [6]):

Ως *τοπικό σύστημα ηρεμίας* (local rest frame) ή *συγκινούμενο σύστημα συντεταγμένων* (comoving coordinate system) ενός παρατηρητή (ή ενός σωματιδίου ή ενός στοιχειώδους τριδιάστατου όγκου ενός ρευστού) ονομάζεται

το σύστημα συντεταγμένων, ως προς το οποίο ο παρατηρητής ακινητεί και σε μία μικρή περιοχή του οποίου ο χωροχρόνος μπορεί να θεωρηθεί τοπικά επίπεδος, δηλαδή

$$u^0 = 1 = u_0 \ , \ u^\alpha = 0 = u_\alpha \ , \ \Gamma^i{}_{kl} = 0 \qquad (1)$$

Αν λοιπόν, στο τοπικό σύστημα ηρεμίας ο *ίδιος όγκος* (proper time) μιας περιοχής της πηγής είναι dV_0, τότε ο αντίστοιχος τετραδιάστατος στοιχειώδης όγκος, προφανώς είναι:

$$dV_{(4)} = ds.dV_0 \qquad (2)$$

Εξάλλου σε ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων, π.χ. ως προς έναν μακρυνό παρατηρητή, ο *τριδιάστατος συντεταγμένος όγκος* (coordinate volume) dV, της περιοχής δεν είναι ίσος προς τον dV_0. Για να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ των dV και dV_0, θεωρούμε σε ένα σύστημα συντεταγμένων $O(x^0 = ct,\ x^\alpha)$ τα τέσσερα στοιχειώδη διανύσματα:

$$dx^i{}_0 = u^i ds \ , \ dx^i{}_\alpha = \delta^i{}_\alpha dx^\alpha \qquad (3)$$

Τότε για το τετραδιάστατο παραλληλεπίπεδο που σχηματίζεται από 4 στοιχειώδη, γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, διανύσματα $dx^i{}_\alpha$ (α = 0,1,2,3), ο προσημασμένος 4-διάστατος όγκος θα είναι: (βλέπε [6] σελ. 22):

$$dV_{(4)} = (-g)^{1/2} e_{iklm} dx_0^i dx_1^k dx_2^l dx_3^m \qquad (4)$$

όπου το

$$d\Omega_{(4)} = e_{iklm} dx_0^i dx_1^k dx_2^l dx_3^m$$

είναι ένα βαθμωτό[1] μέγεθος και προκύπτει ως αποτέλεσμα ενός συναλλοίωτου[2] τανυστή τάξεως n και n το πλήθος των ανταλλοίωτων[3] διανυσμάτων. Το σύμβολο e_{iklm} είναι μία κατηγορία τανυστή που ονομάζεται ***ψευδοτανυστής***[4] (pseudotensor).

---

[1] Ένα μέγεθος α ονομάζεται ***βαθμωτό***, ή ***αναλλοίωτο*** ή ***τανυστής μηδενικής τάξεως*** όταν κατά τη διάρκεια ενός γρ. μετασχηματισμού έχει την ίδια τιμή στις νέες και στις παλιές συντεταγμένες

[2] Θεωρώ τις συναρτήσεις $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ (συνιστώσες) των μεταβλητών x^1, x^2, x^3. Η τριάδα $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ ή α^r όπου r=1,2,3 θα ονομάζεται ***ανταλλοίωτο διάνυσμα*** *ή* ***ανταλλοίωτος τανυστής*** *α΄τάξεως* όταν σε έναν γραμμικό μετασχηματισμό των μεταβλητών, οι α^r μετασχηματίζονται όπως οι μεταβλητές x^r δηλαδή: $\bar{a}^r = \dfrac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^k} a^k = C^r_k a^k$ που σε μορφή πίνακα γράφεται: $\begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \bar{a}^2 \\ \bar{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^1_1 & C^1_2 & C^1_3 \\ C^2_1 & C^2_2 & C^2_3 \\ C^3_1 & C^3_2 & C^3_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$

Ομοίως η τριάδα των συναρτήσεων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ή α_r όπου r=1,2,3 θα λέγεται ***συναλλοίωτο διάνυσμα*** *ή* ***συναλλοίωτος τανυστής α΄τάξεως*** αν σε έναν γρ. μετασχηματισμό των x^r οι α_r μετασχηματίζονται $\bar{a}_r = \dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} a_k = c^k_r a_k$ που σε μορφή πίνακα γράφεται: $\begin{bmatrix} \bar{a}^1 \\ \bar{a}^2 \\ \bar{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^1_1 & c^2_1 & c^3_1 \\ c^1_2 & c^2_2 & c^3_2 \\ c^1_3 & c^2_3 & c^3_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$, όπου ο πίνακας (c^i_j) είναι ο αντίστροφος του (C^i_j). Δηλαδή π.χ. για το στοιχείο $\bar{a}_2$ ισχύει:

Η σχέση (3) με την αντικατάσταση του $dx^i_0 = u^i ds$ από την (2) γίνεται:

$$dV_{(4)} = (-g)^{1/2} e_{iklm} u^i ds dx_1^k dx_2^l dx_3^m$$

και αντικαθιστώντας τους δείκτες *k,l,m* με *1,2,3* αντίστοιχα ισοδύναμα παίρνουμε:

$$dV_{(4)} = (-g)^{1/2} e_{i123} u^i ds dx^1 dx^2 dx^3$$

και επειδή για *i=0* ο ψευδοτανυστής γίνεται $e_{0123} = 1$ (βλέπε υποσημείωση 4) τελικά θα είναι:

$$dV_{(4)} = (-g)^{1/2} 1 \cdot u^0 ds dx^1 dx^2 dx^3$$

$\bar{a}_2 = c_2^1 a_1 + c_2^2 a_2 + c_2^3 a_3$ ή $\bar{a}^2 = C_1^2 a^1 + C_2^2 a^2 + C_3^2 a^3$. Έχουμε λοιπόν δύο τύπους τανυστών α' τάξεως και τους διακρίνουμε από τη θέση του δείκτη, ο ανταλλοίωτος θα συμβολίζεται με «άνω δείκτη» και ο συναλλοίωτος με «κάτω δείκτη». (βλέπε [5] σελ. 13-15)

[3] Οι όροι ***ανταλλοίωτο***, ***συναλλοίωτο*** και ***αναλλοίωτο*** εισήχθησαν από το Βρετανό μαθηματικό James Sylvester (1814-1897)

[4] Η ονομασία ψευδοτανυστές οφείλεται στις ιδιότητες μετασχηματισμού αυτών των αντικειμένων. Σε ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων οι συνιστώσες του πλήρως αντισυμμετρικού ψευδοτανυστή e_{iklm} αλλάζουν πρόσημο, όταν εναλλάσσονται δύο οποιοιδήποτε δείκτες του, ώστε οι μη μηδενικές συνιστώσες του είναι ίσες με +1 ή -1. Συνεπώς όλες οι συνιστώσες με δύο ίσους δείκτες πάντα μηδενίζονται και μη μηδενικές συνιστώσες είναι μόνον αυτές που έχουν διαφορετικούς όλους τους δείκτες τους. Αν τώρα, σε n διαστάσεις είναι $e_{123\ldots n} = +1$ τότε οι μη μηδενικές συνιστώσες $e_{ikl..}$ είναι ίσες με +1 ή -1, ανάλογα με το αν χρειάζεται άρτιος ή περιττός αριθμός μεταθέσεων, ώστε οι αριθμοί I, k, l, … να τοποθετηθούν στη σειρά 1, 2, 3, …, n. Έτσι ως προς περιστροφές του συστήματος συντεταγμένων, τα $e_{ikl\ldots}$ συμπεριφέρονται ως συνιστώσες τανυστή. Όμως, με αλλαγή του προσήμου μιας συντεταγμένης, ενώ οι συνιστώσες ενός τανυστή θα άλλαζαν πρόσημο, στον τανυστή $e_{ikl\ldots}$ δεν αλλάζουν, διότι αυτές θα πρέπει να ορίζονται κατά τον ίδιο τρόπο σε όλα τα συστήματα συντεταγμένων. Σύμφωνα με τον νόμο μετασχηματισμού τανυστών ο ψευδοτανυστής $e_{ikl\ldots}$ θα μετασχηματίζεται από τις Καρτεσιανές (x^i) στις Καμπυλόγραμμες $(x'^{\,i})$ συντεταγμένες ως κάτωθι: $e_{ikl\ldots} = \frac{\partial x'^{\,n}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x'^{\,r}}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial x'^{\,s}}{\partial x^l} \cdots e'_{nrs..}$ ή ισοδύναμα: $e_{ikl\ldots} = Je'_{nrs..}$ (A) όπου: $J = |\frac{\partial x'}{\partial x}|$ είναι η ορίζουσα μετασχηματισμού των συντεταγμένων (**Ιακωβιανή** ορίζουσα).

Από την προφανή σχέση: $g_{ik} = \delta_{ik} = g'_{\ln} \cdot \frac{\partial x'^{\,l}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x'^{\,n}}{\partial x^k}$, παίρνοντας τις ορίζουσες έχουμε ισοδύναμα: $|g_{ik}| = |\delta_{ik}| = |g'_{\ln}| \cdot |\frac{\partial x'^{\,l}}{\partial x^i}| \cdot |\frac{\partial x'^{\,n}}{\partial x^k}|$ και επειδή είναι: $|g_{ik}| = |\delta_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ και $|\frac{\partial x'^{\,l}}{\partial x^i}| = |\frac{\partial x'^{\,n}}{\partial x^k}| = J$ θα έχουμε ισοδύναμα: $1 = |g'_{\ln}| \cdot J \cdot J \Leftrightarrow 1 = |g'_{\ln}| \cdot J^2$ δηλαδή: $J = |g'_{\ln}|^{-1/2}$ (B) όπου $|g'_{\ln}|$ είναι η ορίζουσα των συνιστωσών του μετρικού τανυστή στις καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. Επομένως συνδυάζοντας την (A) με την (B) τελικά παίρνουμε την παρακάτω σχέση μετασχηματισμού του ψευδοτανυστή από τις Καρτεσιανές στις Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες: $e_{ikl\ldots} = |g'|^{-1/2} e'_{nrs..}$ Αυτή η σχέση υποδηλώνει ότι σε ένα σύστημα Καμπυλόγραμμων συντεταγμένων ο $e_{ikl\ldots.}$ των Καρτεσιανών συντεταγμένων θα πρέπει να αντικατασταθεί από τον $e'_{ikl\ldots} = |-g'|^{1/2} e_{ikl\ldots}$. Εδώ χρησιμοποιήθηκε το -g αντί του g, διότι στην περίπτωση του τετραδιάστατου χωροχρόνου, ο μετρικός τανυστής συνήθως επιλέγεται ο g<0 δηλαδή:

$$dV_{(4)} = (-g)^{1/2} u^0 ds dV \qquad (5)$$

όπου: $dV = dx^1 dx^2 dx^3$ είναι ο συντεταγμένος στοιχειώδης όγκος.
Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (5) παίρνουμε την:

$$ds dV_0 = (-g)^{1/2} u^0 ds dV$$

από την οποία προκύπτει η ισοδύναμη σχέση:

$$dV_0 = (-g)^{1/2} u^0 dV \qquad (6)$$

η οποία συνδέει τον ίδιο dV_0 με τον συντεταγμένο στοιχειώδη όγκο dV.

Όμως το ποσό της ύλης που περιέχεται στον συγκεκριμένο όγκο θα πρέπει να είναι το ίδιο και ως προς το καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων και ως προς το τοπικό σύστημα αναφοράς (τοπικά επίπεδο σύστημα), δηλαδή θα πρέπει να είναι:

$$\rho dV = \rho_0 dV_0 \qquad (7)$$

όπου ρ είναι η συντεταγμένη πυκνότητα και ρ_0 η ίδια πυκνότητα της ύλης. Αν στη (7) αντικαταστήσουμε τον ίδιο στοιχειώδη όγκο, όπως δίδεται από την (6), παίρνουμε:

$$\rho dV = \rho_0 (-g)^{1/2} u^0 dV$$

από την οποία με απαλοιφή του στοιχειώδους συντεταγμένου όγκου dV προκύπτει τελικά η σχέση:

$$\rho = (-g)^{1/2} u^0 \rho_0 \qquad (8)$$

η οποία προσδιορίζει την απαραίτητη γενίκευση ρ, της τοπικά μετρούμενης πυκνότητας ρ_0, όταν λαμβάνεται υπόψιν το πεδίο βαρύτητος και η κίνηση της ύλης.

Η περιγραφή του φυσικού περιεχομένου του τανυστή ενέργειας – ορμής είναι πολύ εύκολη στην περίπτωση του επίπεδου χωροχρόνου της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητος, για την απλούστερη δυνατή πηγή συνεχούς κατανομής ύλης, δηλαδή ένα *νέφος σκόνης* από σωματίδια που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Στην περίπτωση αυτή η μόνη συνεισφορά στο ενεργειακό περιεχόμενο του χωροχρόνου, πέραν της ενέργειας ηρεμίας της πηγής, προέρχεται από την κίνηση της ύλης. Υποθέτομε λοιπόν, ότι στο χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων Ο, σε μία μικρή περιοχή του νέφους, ο *αριθμός πυκνότητας* (number density), δηλαδή το πλήθος των σωματιδίων ανά μονάδα όγκου είναι n και η τριδιάστατη ταχύτητα των σωματιδίων είναι u^α. Από το γραμμικό στοιχείο του επίπεδου χωροχρόνου, το οποίο είναι:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

παίρνουμε διαδοχικά:

$$\frac{ds^2}{c^2 dt^2} = 1 - \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{c^2 dt^2}$$

και

$$\frac{ds^2}{c^2 dt^2} = 1 - \frac{1}{c^2}\upsilon^2 \tag{9}$$

όπου:

$$\upsilon^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{dt^2}$$

Αντιστρέφοντας την (9) και παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες προκύπτει διαδοχικά:

$$\frac{c^2 dt^2}{ds^2} = (1 - \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-1}$$

και

$$\frac{cdt}{ds} = (1 - \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-1/2} \tag{10}$$

όμως επειδή $\upsilon^2 \le c^2$ είναι $0 \le (1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}) \le 1$ άρα $(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-1/2} \ge 1$ και δεδομένου ότι είναι $\frac{cdt}{ds} = u^0$ η σχέση (10) παίρνει τη μορφή:

$$u^0 = (1 - \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-1/2} \ge 1 \quad \text{και} \quad u^\alpha = \frac{\upsilon^\alpha}{c} u^0 \tag{11}$$

Επίσης, αν είναι m_0 η *μάζα ηρεμίας* (rest mass) ενός τυπικού σωματιδίου του νέφους, δηλαδή η μάζα του ως προς το τοπικό σύστημα ηρεμίας του, τότε η μάζα αυτή ως προς το σύστημα Ο θα είναι: $m = m_0 u^0$ και αφού λόγω της (11) είναι $u^0 \ge 1$ τελικά η μάζα ως προς το σύστημα Ο θα είναι σε συνάρτηση με την μάζα ηρεμίας:

$$m = m_0 u^0 \ge m_0 \tag{12}$$

Εξάλλου, επειδή το πλήθος των σωματιδίων σε συγκεκριμένο όγκο είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να γράψουμε:

$$n_0 dV_0 = ndV \tag{13}$$

όπου n_0 ο ίδιος αριθμός πυκνότητας.

Από τις σχέσεις (6), (7) και (13) προκύπτει:

$$\frac{n}{n_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{dV_0}{dV} = (-g)^{1/2} u^0 = u^0 \tag{14}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1: **Η ποσότητα** $T^{00} = nmc^2 = n_0 m_0 c^2 (u^0)^2 = \rho_0 c^2 (u^0)^2$ (15) **είναι η *πυκνότητα μάζας - ενέργειας*[5] του χωροχρόνου, την οποία μετρά ο παρατηρητής.**

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: **Η ποσότητα** $T^{0\alpha} = nmc\upsilon^\alpha = n_0 m_0 c^2 u^0 u^\alpha = \rho_0 c^2 u^0 u^\alpha$ (16) **είναι η *ροή μάζας - ενέργειας* [6](mass – energy flux) κατά τη διεύθυνση x^α, ανά μονάδα χρόνου και κάθετα προς τη μοναδιαία επιφάνεια. Ονομάζεται επίσης και *πυκνότητα ροής μάζας - ενέργειας* (mass – energy flux density) ή *πυκνότητα ορμής* (momentum density)**

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: **Η ποσότητα** $T^{\alpha\beta} = nm\upsilon^\alpha \upsilon^\beta = n_0 m_0 c^2 u^\alpha u^\beta = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta$ (17) **είναι η *ροή της α-συνιστώσας της ορμής*[7] κατά μήκος του άξονα x^β, ανά μονάδα χρόνου και κάθετα προς τη μοναδιαία επιφάνεια.**

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι σχέσεις (15), (16) και (17) αποτελούν δεκαέξι[8] συνιστώσες του μαθηματικού αντικειμένου T^{ik}.

Πράγματι σύμφωνα με τον Τανυστικό Λογισμό ένας τανυστής λ-τάξεως αποτελείται από κ^λ συνιστώσες, όπου κ ο αριθμός που εκφράζει τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι δείκτες του τανυστή (διάσταση του χώρου). Έτσι ο δευτέρας τάξεως τανυστής T^{ik}, με τους δείκτες i,k που παίρνουν τις τέσσερις τιμές 0,1,2,3 ο καθένας, αποτελείται από $4^2=16$ συνιστώσες.

Έτσι οι δεκαέξι συνιστώσες των σχέσεων (15), (16), (17) συμπεριφέρονται ως συνιστώσες τανυστή ως προς τον μετασχηματισμό Lorentz και γράφονται ως[9]:

$$T_{ik} = \rho_0 c^2 u_i u_k \qquad (18)$$

και περιγράφουν τον ***τανυστή ενέργειας – ορμής*** ενός μη βαρυτικού νέφους σκόνης.

---

[5] Από την $T^{00} = nmc^2$ και επειδή είναι $n = n_0 u^0$ και $m = m_0 u^0$ με αντικατάσταση προκύπτει: $T^{00} = nmc^2 = n_0 m_0 c^2 (u^0)^2$ ενώ επειδή $\rho_0 = n_0 m_0$ παίρνουμε την σχέση του Ορισμού 1: $T^{00} = nmc^2 = n_0 m_0 c^2 (u^0)^2 = \rho_0 c^2 (u^0)^2$

[6] Ομοίως από την $T^{0\alpha} = nmc\upsilon^\alpha$ και επειδή είναι $n = n_0 u^0$ και $m = m_0 u^0$ και από την (11) $u^\alpha = \dfrac{\upsilon^\alpha}{c} u^0 \Leftrightarrow \upsilon^\alpha = \dfrac{u^\alpha}{u^0} c$ με αντικατάσταση των τριών σχέσεων στην πρώτη παίρνουμε αρχικά $T^{0\alpha} = nmc\upsilon^\alpha = n_0 m_0 c^2 u^0 u^\alpha$ και επειδή $\rho_0 = n_0 m_0$ την τελική σχέση του Ορισμού 2: $T^{0\alpha} = nmc\upsilon^\alpha = n_0 m_0 c^2 u^0 u^\alpha = \rho_0 c^2 u^0 u^\alpha$

[7] Τέλος με τον ίδιο συλλογισμό από την $T^{\alpha\beta} = nm\upsilon^\alpha \upsilon^\beta$ επειδή είναι $n = n_0 u^0$ και $m = m_0 u^0$ και από την (11) $u^\alpha = \dfrac{\upsilon^\alpha}{c} u^0 \Leftrightarrow \upsilon^\alpha = \dfrac{u^\alpha}{u^0} c$ και $u^\beta = \dfrac{\upsilon^\beta}{c} u^0 \Leftrightarrow \upsilon^\beta = \dfrac{u^\beta}{u^0} c$ αντικαθιστώντας στην πρώτη παίρνουμε αρχικά $T^{\alpha\beta} = nm\upsilon^\alpha \upsilon^\beta = n_0 m_0 c^2 u^\alpha u^\beta$ και επειδή $\rho_0 = n_0 m_0$ την τελική σχέση του Ορισμού 3: $T^{\alpha\beta} = nm\upsilon^\alpha \upsilon^\beta = n_0 m_0 c^2 u^\alpha u^\beta = \rho_0 c^2 u^\alpha u^\beta$

[8] Πράγματι η T^{00} είναι μία μοναδική συνιστώσα, η $T^{0\alpha}$ αποτελεί τρεις συνιστώσες, μία για κάθε τιμή του *α=1,2,3* και τέλος η $T^{\alpha\beta}$ αποτελεί άλλες δώδεκα συνιστώσες. (κανονικά ο τανυστής $T^{\alpha\beta}$ κρύβει 16 συνιστώσες αλλά οι τέσσερις ήδη αναφέρθηκαν στις T^{00} και $T^{0\alpha}$)

[9] Η μορφή (18) είναι ισοδύναμη με την $T^{ik} = \rho_0 c^2 u^i u^k$.

Στην γενική περίπτωση μιας μακροσκοπικής βαρυτικής πηγής συνεχούς κατανομής ύλης, με ίδια πυκνότητα μάζας – ενέργειας:

$$\mathcal{E} = \rho_0 c^2 \qquad (19)$$

και ισότροπη *ίδια πίεση p*, ο τανυστής ενέργειας ορμής προσδιορίζεται ως εξής:

Η ροή της ορμής μέσα από μία στοιχειώδη επιφάνεια dS_α της πηγής είναι ίση με την δύναμη την σκούμενη σ' αυτή την επιφάνεια. Έτσι, σύμφωνα και με τον Ορισμό 3, η $T_{\alpha\beta}dS^\beta$ είναι η α-συνιστώσα αυτής της δυνάμεως. Εξάλλου, στο τοπικό σύστημα ηρεμίας ενός στοιχειώδους όγκου της πηγής, σύμφωνα με τον νόμο του Pascal της υδροστατικής, η α-συνιστώσα της δυνάμεως λόγω της ισότροπης πιέσεως *p* είναι:

$$pdS_\alpha = pg_{\alpha j}dS^j = pg_{\alpha\beta}dS^\beta \qquad (20)$$

όπου το πρώτο σκέλος της ισότητας (20) προέκυψε από την ανύψωση του δείκτη *α* ως δείκτης *j* (πολλαπλασιάζοντας με τον τανυστή $g_{\alpha j}$), ενώ το δεύτερο σκέλος προέκυψε από την αλλαγή του δείκτη *j* σε *β* (επιτρέπεται η αυθαίρετη αλλαγή δεικτών).

Όμως στον επίπεδο χωροχρόνο ισχύει (βλέπε [6] σελ. 19, σχέση (1.1.16)) για τις συνιστώσες του μετρικού τανυστή:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{ή} \quad g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta} \qquad (21)$$ [10]

οπότε η σχέση (20) λόγω της (21) παίρνει τη μορφή:

$$pdS_\alpha = pg_{\alpha j}dS^j = pg_{\alpha\beta}dS^\beta = -p\delta_{\alpha\beta}dS^\beta \qquad (22)$$

όμως είπαμε ότι η α-συνιστώσα της δυνάμεως είναι $T_{\alpha\beta}dS^\beta$, άρα η (22) τελικά γράφεται:

$$pdS_\alpha = pg_{\alpha j}dS^j = pg_{\alpha\beta}dS^\beta = -p\delta_{\alpha\beta}dS^\beta = T_{\alpha\beta}dS^\beta \qquad (23)$$

με σύγκριση του δεξιού σκέλους της (23) εξάγουμε την ισότητα:

$$T_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} \qquad (24)$$

Συνοψίζοντας τώρα, για τις 16 συνιστώσες του τανυστή ενέργειας – ορμής μιας μακροσκοπικής βαρυτικής πηγής συνεχούς κατανομής με ίδια πυκνότητα μάζας – ενέργειας $\mathcal{E}$ και ισότροπη ίδια πίεση p, συνάγουμε τα παρακάτω:

---

[10] Όπου $\delta_{\alpha\beta}$ είναι η συνάρτηση δέλτα Kronecker (σύμβολο Kronecker) και ορίζεται όπως παρακάτω: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad \alpha = \beta \\ 0 & \acute{o}\tau\alpha\nu \quad \alpha \neq \beta \end{cases}$. Στο πλαίσιο της γραμμικής άλγεβρας, το δέλτα Kronecker μπορεί να αναπαρασταθεί υπό τη μορφή ενός συμμετρικού πίνακα διάστασης N×N όπου N είναι ο συνολικός αριθμός των (θετικών) ακεραίων τιμών που μπορούν να πάρουν οι δείκτες. (βλέπε[5] σελ 9-10, [10])
Για παράδειγμα αν *α,β=0,1,2,3* τότε το δέλτα Kronecker μπορεί να αναπαρασταθεί υπό τη μορφή ενός 4×4 πίνακα, του οποίου όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά πλήν εκείνων της κυρίας διαγωνίου του που ισούνται με την μονάδα, δηλαδή: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

α. Η πυκνότητα μάζας – ενέργειας (σύμφωνα με τη σχέση (15)) είναι:

$$T_{00} = \rho_0 c^2 (u_0)^2 \tag{25}$$

και αφού από την πρώτη ισότητα της σχέσεως (1) είναι $u^0 = 1 = u_0 \Leftrightarrow (u_0)^2 = 1$ και σε συνδυασμό με την (19) η σχέση (25) για την πυκνότητα μάζας – ενέργειας γίνεται:

$$T_{00} = \rho_0 c = \mathcal{E} \tag{26}$$

β. Η πυκνότητα ορμής (σύμφωνα με τη σχέση (16)) είναι:

$$T_{0\alpha} = \rho_0 c^2 u_0 u_\alpha \tag{27}$$

και αφού από την πρώτη και δεύτερη ισότητες της σχέσεως (1) είναι $u^0 = 1 = u_0$ και $u^\alpha = 0 = u_\alpha$, εφαρμόζοντάς τις στην (27) αυτή μηδενίζεται[11], δηλαδή η πυκνότητα ορμής είναι:

$$T_{o\alpha} = 0 \tag{28}$$

γ. Τέλος η ροή της ορμής μέσα από μία στοιχειώδη επιφάνεια της πηγής, η οποία είναι ίση με την δύναμη την ασκούμενη στην επιφάνεια, μας έδωσε την α-συνιστώσα αυτής της δυνάμεως δηλαδή την $T_{\alpha\beta} dS^\beta$ από την οποία σε συνδυασμό με την σχέση (23) πήραμε την $T_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta}$, από την οποία εξάγουμε ότι για $\alpha = \beta$ είναι :

$$T_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} = -p \cdot 1 = -p \tag{29}$$

ενώ για $\alpha \neq \beta$ είναι:

$$T_{\alpha\beta} = -p\delta_{\alpha\beta} = -p \cdot 0 = 0 \tag{30}$$

Έτσι οι σχέσεις (26), (28), (29) και (30) μας δίνουν τις 16 συνιστώσες του τανυστή ενέργειας – ορμής στο τοπικό σύστημα ηρεμίας, ο οποίος σε μορφή πίνακα 4x4 έχει την διαγώνια μορφή:

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathcal{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \tag{31}$$

η απλούστερα:

$$T_{\alpha\beta} = (\mathcal{E}, -p, -p, -p) \tag{32}$$

Από τις ισοδύναμες εκφράσεις του τανυστή ενέργειας – ορμής, όπως αυτές δίδονται από τις σχέσεις (31) και (32) επαληθεύεται ότι, σε ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων, η μορφή του $T_{\alpha\beta}$ για την βαρυτική μακροσκοπική πηγή είναι:

$$T_{\alpha\beta} = (\mathcal{E} + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{33}$$

Η κατάσταση της ύλης που περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας – ορμής της σχέσεως (33) ονομάζεται **τέλειο ρευστό**.

Ιωάννης Χρ. Αγαπάκης

---

[11] Ο μηδενισμός της πυκνότητας ορμής προκύπτει επίσης και από την σχέση (24) αν θέσουμε στη θέση του α το *0* και $\beta = \alpha \neq 0$ τότε παίρνουμε: $T_{0\alpha} = -p\delta_{0\alpha}$, και σύμφωνα με τον ορισμό του δέλτα Kronecker είναι $\delta_{0\alpha} = 0$ διότι $0 \neq \alpha$. Επομένως θα είναι $T_{0\alpha} = -p\delta_{0\alpha} = -p \cdot 0 = 0$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Bertotti, B. , Felice, F. and Pascolini, A. (1984) «*General Relativity and Gravitation (Fundamental Theories of Physics)*» Springer

[2] Einstein, A. (1915) «*Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstheorie*». Annalen der Physik vol.354, is.7, pp 769-822. και
«*Η Θεμελίωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας*». (ανατύπωση για το ΒΗΜΑ: Εκδόσεις Τροχαλία 2003)

[3] Eisenhart, E Pf. (1949) «*Riemannian Geometry*». Princeton University Press, Princeton New York.

[4] Ηλιοπούλου Ε. Α., Ταμία – Δημοπούλου Π. (1989) «*Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες*» Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

[5] Μπαντές Γιώργος «*Τανυστικός Λογισμός, Παγκόσμια Γλώσσα*», Σέρρες

[6] Σπύρου Ν. Κ. (1989) «*Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας*» Εκδόσεις Γαρταγάνης, Θεσσαλονίκη.

[7] Σταματάκης Στ. (2008) «*Εισαγωγή στην Κλασσική Διαφορική Γεωμετρία*» Εκδόσεις Αϊβάζη, Θεσσαλονίκη.

[8] Στεφανίδης, Ν Κ. (1995) «*Διαφορική Γεωμετρία*», Θεσσαλονίκη.

[9] Αγαπάκης Ιωάννης Χρ. (2019) «Μελανές Οπές», CCity Center, Θεσσαλονίκη

ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[10] https://el.wikipedia.org/wiki/Δέλτα_του_Κρόνεκερ

[11] https://el.wikipedia.org/wiki/Λαγκρανζιανή_συνάρτηση